数理解析研究所講究録
186巻 1973年 47-60

多次元波動方程式の境界値問題について

東大教養　上野　正

ここでは，多次元の拡散方程式に於いて可能な境界条件は，波動方程式に対しても可能であるか，という問題を考える．

一次元拡散方程式については，Feller [2] によって境界が分類され，可能な境界条件は完全に決定されている．この結果の一部分が，A. D. Wentzell [5] によって次のように拡張されている．

D は R^N の connected bounded domain で ∂D は十分なめらか．

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)$$

は十分の regularity をもつ elliptic operator とする．$\mathfrak{A}$ は $C(\bar{D})$ 上の positive な Hille-Yosida 半群の generator で A の contraction とする．

このとき ∂D の各点 x において，$u \in \mathfrak{D}(\mathfrak{A}) \cap C^2(\bar{D})$ に対し

$$Lu(x) = 0, \quad 但し,$$

$$Lu(x) = \sum_{i,j=1}^{N-1} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j}u(x) + \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i(x)\frac{\partial}{\partial \xi_i}u(x) + \gamma(x)u(x) + \delta(x)\mathfrak{A}u(x) \tag{1}$$

$$+ \mu(x)\frac{\partial}{\partial n}u(x) + \int_{\bar{D}} \Big(u(y) - u(x) - \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial \xi_i}u(x)\,\xi_i(x,y)\Big)\nu(x,dy).$$

ここに $\{\alpha_{ij}(x)\}$ は non-negative definite，$\gamma(x), \delta(x) \leq 0$，$\mu(x) \geq 0$，$\nu(x,\cdot)$ は $\bar{D}$ 上の measure で x の近傍を除いた所では有界，かつ

$$\int_{\bar{D}} \Big\{ \sum_{1}^{N-1} \xi_i(x,y)^2 + \xi_N(x,y) \Big\} \nu(x,dy) < \infty.$$

$\{\xi_i(x,y),\ 1 \leq i \leq N\}$ は x における local coordinate で，$y \in \bar{D}$ についてなめらか，

$\xi_N(x,y) \geq 0$ で, $y=x$ での $\xi_N = 0$, かつ $\frac{\partial u}{\partial \xi_N}(x) = \frac{\partial}{\partial n}u(x)$.
$|\sigma(x)| + \mu(x) > 0$ か, 又は $\nu(x, \bar{D}) = \infty$ が成立つ.

Wentzell は $\bar{D}$ が closed disc か R^3 の閉球のとき, A および L が rotation invariant ならば semigroup が unique に対応することも示している. したがって, はじめにあげたような問題をとくためには, この型の bd. 条件に対して解を構成することが必要である.

ところで Feller [2] は一次元のばあいには non-classical な bd. 条件をみたす波動方程式の解を構成しているので, それは,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au = \frac{d}{dm}\frac{d^+}{ds}u, \qquad r_1 < x < r_2$$

$$\delta_i u(r_i) + m_i A u(r_i) + \frac{d}{dn}u(r_i) = 0, \qquad i=1,2$$

に対してである. ここでは適当な Hilbert space を構成し, Fourier 展開を用いている. この方法は我々の問題に用いるのは困難なので ここでは吉田 [6] の方法を抽象化してそれを用いる. [6] では多次元 no boundary の波動方程式がとかれているが, その内容は次のようにもよめる. 1) まず, 対応する拡散方程式をとく. 2) 拡散方程式が具合よくとければ波動方程式がとけることを示す.

まず, この後半を抽象化することからはじめる. あとの方では bd. 条件の Lu は (1) の形よりも簡単なものに限定する. bd. 条件の直観的意味については後にのべる.

この研究では藤原大輔氏に色々多くのことを教えていただいて また, 全体としてまだ中間的段階だが, このことを記して感謝したい.

1. An abstract Scheme.

$\mathfrak{H}_0$ は real vector space で，内積 $(f, g)_s$ と ノルム $\|f\|_e$ が def され

$$C\|f\|_s \le \|f\|_e \;, \quad f \in \mathfrak{H}_0 , \quad \text{但し} \quad \|f\|_s = (f, f)_s^{1/2} ,$$

が成立つとする。$\mathfrak{H}$ は $\|\ \|_s$ による $\mathfrak{H}_0$ の completion，$\mathfrak{H}_*$ は $\|\ \|_e$ によるそれとする。

次の仮定 1) − 5) を考える。

1) $\mathfrak{H}_*$ は $\mathfrak{H}$ の subspace とみなしうる。

2) $\mathfrak{H}$ 上に generator $\mathfrak{A}$ をもつ Hille-Yosida 半群が存在し，$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{H}_*$ の subset

3) $\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{H}_*$ の subset として dense。

4) $((\alpha_0 - \mathfrak{A})f, f)_s = \|f\|_e^2 , \quad f \in \mathfrak{D}$ ，となる $\alpha_0 > 0$ が存在する。

5) $|(\mathfrak{A}f, g)_s - (\mathfrak{A}g, f)_s| \le K(\|f\|_e^2 + \|g\|_s^2) \quad f, g \in \mathfrak{D}$.

<u>Def.</u> $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{H}_* \\ \mathfrak{H} \end{pmatrix}$ とし，ノルムを $\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\| = (\|f\|_e^2 + \|g\|_s^2)^{1/2}$ と def.

$\mathfrak{G}\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ \mathfrak{A}f \end{pmatrix}$, for $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(\mathfrak{G}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{D} \\ \mathfrak{H}_* \end{pmatrix}$, と def.

このとき，

<u>Theorem</u> 仮定 1) − 5) がみたされるとき，$\mathfrak{G}$ は $\mathbb{B}$ 上の Hille-Yosida 半群の generator である。

<u>Cor.</u> $\{T_t\}$ を $\mathfrak{G}$ に対応する半群とし，$f \in \mathfrak{D}$, $g \in \mathfrak{H}_*$ に対し $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = T_t \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ とおけば

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) = \mathfrak{A} u(t) , \quad u(t) \to f, \quad v(t) \to g, \text{ as } t \to 0$$

<u>Remark.</u> 仮定 3) は次の条件の下で証明できる。

$$\alpha \|(\alpha - \mathfrak{A})^{-1} f\|_e \le \|f\|_e \quad , \; f \in \mathfrak{D}$$

$$\|\alpha(\alpha - \mathfrak{A})^{-1} f - f\|_e \longrightarrow 0 \quad , \; f \in \mathfrak{D}.$$

Theorem の証明は，$f, g \in \mathfrak{D}$ に対し $(\alpha - \mathfrak{G})\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ とするとき，$\left\| \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|^2 = \|f\|_e^2 + \|g\|_s^2 = ((\alpha_0 - \mathfrak{A})f, f)_s + (g, g)_s$ と $\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\|$ の関係を導くことだけが essential で [6] に基く。 波動方程式と関係ないものの対象に応用できるようである。

2 解の構成方針

これまでのべて来たことから，適当な space のとり方，方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u = Au, \quad \text{on } D,$$

$$Lu(x) = 0, \quad \text{on } \partial D$$

ができる半群を構成し，それに対し 1 の scheme が適用できることを確かめればよい．ところが，そのためには，大まかに云って

$$\left.\begin{aligned} (\alpha - A)u &= v, \quad \text{on } D \\ Lu &= 0, \quad \text{on } \partial D \end{aligned}\right\} (2)$$

が十分多くの v に対してとければよい．この解 u があればそれを $u = G_\alpha v$ とかくことにする．ところで，

$$\left.\begin{aligned} (\alpha - A)u_0 &= v, \quad \text{on } D \\ u_0(x) &= 0, \quad x \in \partial D \end{aligned}\right\} (3)$$

はなめらかな v に対し unique な解 $u_0 = G^0_\alpha v$ をもつ，又，

$$\left.\begin{aligned} (\alpha - A)u &= 0, \quad \text{on } D \\ u(x) &= \varphi(x), \quad x \in \partial D \end{aligned}\right\} (4)$$

もなめらかな φ に対し unique な解 $u(x) = H_\alpha \varphi(x)$ をもつ．

今もし (2) に対する解が存在すれば

$(\alpha - A)(u - u_0) = v - v = 0$, だから，(4) により

$u - u_0 = H_\alpha [u - u_0]_{\partial D}$. $[f]_{\partial D}$ は f の bd. 値を示す. $[u_0]_{\partial D} = 0$ だから

$u - u_0 = H_\alpha [u]_{\partial D}$. ところが (2) によって $Lu = 0$ だから

$-Lu_0 = L(u - u_0) = LH_\alpha [u]_{\partial D}$. そこでもし $(LH_\alpha)^{-1}$ があれば

$u = u_0 - H_\alpha (LH_\alpha)^{-1}(Lu_0)$. すなわち，

$$G_\alpha v = G^0_\alpha v - H_\alpha (LH_\alpha)^{-1} (LG^0_\alpha v) \qquad (5)$$

でなければならぬ．そこで解構成の方針としては，

この手続をrigorousなものにし，定義されたG_αが所望のresolventであることを確かめればよいことになる．この方針はBanach空間のほぼいい[4],[5]で用いたものであるが，略は[1]にさかのぼる．

3. bd. 条件

ここでは簡単のため，Aはlaplacian $\Delta=\sum_1^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$とし，Luは次のように仮定する．

$$Lu(x)=a\cdot Bu(x)+\gamma(x)u(x)+\delta(x)Au(x)+\frac{\partial}{\partial n}u(x)+\int_{\partial D}(u(y)-u(x))\nu(x,dy) \qquad (6)$$

Bは∂D上のlaplacian $\sum_1^{N-1}\frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2}$，$a\geq 0$，$\gamma(x),\delta(x)\leq 0$，$\nu(x,\cdot)$は$\partial D$上のmeasureで，前の条件よりもやや強く，$\int_{\partial D}\sum_1^{N-1}|\xi_i(x,y)|\nu(x,dy)<\infty$とする．regularityとして，$\gamma,\delta$は十分smooth，また最終項は$\partial D$上十分smoothな$u$を$C^2(\partial D)$にうつすものとする．

より実質的な制限として，$\nu(x,\cdot)$は∂D上のsurface element dxに対しdensity $\nu(x,y)$をもち，$\nu(x,y)=\nu(y,x)$が成立つものとする．さらに

$$a>0,\quad \delta(x)<0$$

を仮定する．これからの議論を修正すれば$a=0$でよく，$\delta(x)\equiv 0$でもよいが，δが部分的に0および正となる場合は簡単ではない．$\frac{\partial}{\partial n}u(x)$の係数が1であることは$\mu(x)>0$を仮定したことと同等である．

$Bu(x)$をuniformly ellipticな2階の微分作用素におきかえることは容易である．また$\nu(x,\cdot)$で内部に及ぶ測度にすることも，内部へのmeasureが全体で若干のregularityを仮定すれば可能な見通しだが十分checkできていない．内部への測度が無限のばあいには拡散方程式の解は定まると思うが1の仮定が成立つかどうかは判らない．もし可能ならば，かなりの工夫を要することと思う．

4、記号の定義

$$(f,g)=\int_D f(x)g(x)\,dx\ ,\qquad \langle f,g\rangle=\int_{\partial D} f(x)g(x)\,dx$$

$$D(f,g)=\int_D \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}f\,\frac{\partial}{\partial x_i}g\,dx\ ,\qquad D\langle f,g\rangle=\int_{\partial D}\sum_{i=1}^{N-1}\frac{\partial}{\partial \xi_i}f\,\frac{\partial}{\partial \xi_i}g\,dx$$

$$\nu(f,g)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}dx\int_{\partial D}\nu(x,dy)\,(f(y)-f(x))(g(y)-g(x))$$

$$(f,g)_s=(f,g)+\langle f,g\cdot|\delta|\rangle$$

$$(f,g)_\ell=(f,g)_s+D(f,g)+a\cdot D\langle f,g\rangle+\langle f,g|\beta|\rangle+\nu(f,g)$$

$$\langle f,g\rangle_1=\langle f,g\rangle+D\langle f,g\rangle+\nu(f,g)$$

$$\|f\|=(f,f)^{1/2},\quad \|f\|_s=(f,f)_s^{1/2},\quad \|f\|_\ell=(f,f)_\ell^{1/2},\quad \|f\|_\partial=\langle f,f\rangle^{1/2},\quad \|f\|_1^\partial=\langle f,f\rangle_1^{1/2}$$

$\mathfrak{H}^0$ は $\bar{D}$ 上十分 smooth な函数の全体. $\mathfrak{H}_0^\partial$ は ∂D 上十分 smooth な函数の全体. $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ は $\mathfrak{H}_0$ を $\|\ \|_s$ 及び $\|\ \|_\ell$ によって, $\mathfrak{H}^\partial$ 及び $\mathfrak{H}_1^\partial$ は $\mathfrak{H}_0^\partial$ を $\|\ \|_\partial$ 及び $\|\ \|_1^\partial$ によってそれぞれ completion したもの. 十分とは本来は明確に指定すべきであるが, ここではあまり本質的でないから省略する.

上の記号によって Green-Stokes の公式をかいておく.

$$D(u,v)+(Au,v)+\left\langle\frac{\partial}{\partial n}u,v\right\rangle=0,\qquad u,v\in\mathfrak{H}_0 \tag{7}$$

$$\langle B\varphi,\psi\rangle+D\langle\varphi,\psi\rangle=0,\qquad \varphi,\psi\in\mathfrak{H}_0^\partial \tag{8}$$

$\nu(\varphi,\psi)$ の def. は次の事実に起因する:

$$\left\langle\int_{\partial D}(\varphi(y)-\varphi(\cdot))\nu(\cdot,dy),\psi\right\rangle=-\nu(\varphi,\psi) \tag{9}$$

実際, 左辺 $=\displaystyle\int_{\partial D}dx\int_{\partial D}\psi(x)(\varphi(y)-\varphi(x))\nu(x,y)\,dy$, ($x$ と y をとりかえ, $\nu(x,y)=\nu(y,x)$ をつかうと)

$$=\int_{\partial D}dy\int_{\partial D}\psi(y)(\varphi(x)-\varphi(y))\nu(x,y)\,dx,$$ (上と下は同じだから足して2で割れば)

$$=-\frac{1}{2}\int_{\partial D}\int_{\partial D}dx\,dy\,(\varphi(y)-\varphi(x))(\psi(y)-\psi(x))\nu(x,y)$$

$$=-\nu(\varphi,\psi).$$

5　G^0_α と $\overline{LG^0_\alpha}$

なめらかな v on $\bar{D}$ に対する(2)の解を $G^0_\alpha v$ とかいたが、これについて

$$\|G^0_\alpha v\| \le \frac{1}{\alpha}\|v\| , \qquad \Big\|\frac{\partial}{\partial n} G^0_\alpha v\Big\| \le C\|v\|, \quad {}^\exists C>0$$

である。これをもとに、G^0_α を $\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$ の、$\frac{\partial}{\partial n}G^0_\alpha$ を $\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_\partial$ の bdd. operator として拡張できることが容易にわかり、後者を $\overline{\frac{\partial}{\partial n}G^0_\alpha}$ とかけば

$$\|G^0_\alpha v\|_s = \|G^0_\alpha v\| \le \frac{1}{\alpha}\|v\|, \qquad v\in\mathfrak{H} \qquad (10)$$

$$\Big\|\overline{\frac{\partial}{\partial n}G^0_\alpha} v\Big\|_\partial \le C\|v\| \le C\|v\|_s, \qquad v\in\mathfrak{H}. \qquad (11)$$

なめらかな v に対する $G^0_\alpha v$ に L をほどこすと、$G^0_\alpha v(x)=0$ on ∂D だから

$$LG^0_\alpha v = \Big(aB + \gamma + \delta A + \frac{\partial}{\partial n}\Big)G^0_\alpha v + \int_{\partial D} \nu(x,dy)\big(G^0_\alpha v(y) - G^0_\alpha v(x)\big)$$

$$= \delta A G^0_\alpha v + \frac{\partial}{\partial n}G^0_\alpha v = \delta(\alpha G^0_\alpha v - v) + \frac{\partial}{\partial n}G^0_\alpha v$$

$$= -\delta\cdot v + \frac{\partial}{\partial n}G^0_\alpha v.$$

これは $\mathfrak{H}$ の subspace $\mathfrak{H}_0$ で def. され $\mathfrak{H}^\partial$ で値をとる operator として有界だから $\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_\partial$ の operator $\overline{LG^0_\alpha}$ に unique に ext. される。あきらかに

$$\overline{LG^0_\alpha}\, v(x) = -\delta(x)v(x) + \overline{\frac{\partial}{\partial n}G^0_\alpha}\, v(x). \qquad (12)$$

* v が D 上 0 で ∂D 上 0 でない場合、$G^0_\alpha v\equiv 0$ であっても $\overline{LG^0_\alpha}v \neq 0$ ではないことが(12)から明らかである。

6　H_α と $\overline{LH_\alpha}$

∂D 上なめらかな φ に対する(4)の解 $H_\alpha\varphi$ に対し

$$\|H_\alpha\varphi\| \le C\cdot\|\varphi\|_\partial, \qquad C_1\|\varphi\|_\partial^2 \le \alpha(H_\alpha\varphi, H_\alpha\varphi) + D(H_\alpha\varphi, H_\alpha\varphi) \le C_2\big(\|\varphi\|^\partial_1\big)^2$$

が成立つ。このことから H_α は $\mathfrak{H}^\partial$ 上に ext. され以下の評価をみたす。すなわち

$$\|H_\alpha\varphi\| \le C\|\varphi\|_\partial, \quad \|H_\alpha\varphi\|_s \le C'\|\varphi\|_\partial, \qquad \varphi\in\mathfrak{H}^\partial, \qquad (13)$$

$$C_1\|\varphi\|_\partial^2 \le \alpha(H_\alpha\varphi, H_\alpha\varphi) + D(H_\alpha\varphi, H_\alpha\varphi) \le C_2\big(\|\varphi\|^\partial_1\big)^2, \qquad \varphi\in\mathfrak{H}^\partial, \qquad (14)$$

$$\|H_\alpha\varphi\|_l \le C_3\|\varphi\|^\partial_1, \qquad \varphi\in\mathfrak{H}^\partial_1 \qquad (15)$$

(15)は $\| \ \|_e$ の def. と (14) から容易に導かれる。((14)の中央の項はもっと精密に評価されるべき項だが、ここでは $\delta(x)<0$ のような仮定から、ごく大まかな評価を用いることですむ。) なお、

$$H_\alpha \varphi - H_\beta \varphi + (\alpha-\beta) G^0_\alpha \cdot H_\beta \varphi = 0, \qquad \varphi \in \mathfrak{h}^\partial \qquad (16)$$

これは smooth な φ に対しては左から $(\alpha - A)$ を apply すると 0、∂D 上 0 なることから明らかであるが、H_α と G^0_α の有界性から $\varphi \in \mathfrak{h}^\partial$ に対しても成立つ。

$\varphi, \psi \in \mathfrak{h}^\partial_0$ に対し、Green-Stokesの公式と (9) 及び、∂D 上では $H_\alpha \psi = \psi$ なることに注意して計算すると、

$$-\langle L H_\alpha \varphi, \psi \rangle = -\langle a B\varphi + \gamma \cdot \varphi + \delta A H_\alpha \varphi + \tfrac{\partial}{\partial n} H_\alpha \varphi + \int_{\partial D} \nu(x,dy)(\varphi(y) - \varphi(x)), \psi \rangle$$

$$= a \cdot D\langle \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \psi |\gamma| \rangle - \langle \delta\alpha\varphi, \psi \rangle + D(H_\alpha \varphi, H_\alpha \psi)$$

$$+ (A H_\alpha \varphi, H_\alpha \psi) + \nu(\varphi, \psi)$$

$$= \langle \varphi, \psi \cdot |\gamma + \alpha\delta| \rangle + a \cdot D(\varphi, \psi) + D(H_\alpha \varphi, H_\alpha \psi) + \alpha (H_\alpha \varphi, H_\alpha \psi) + \nu(\varphi, \psi)$$

ここで (14) の評価に注意すれば次のことは容易に証明される。

Proposition 1. $-\langle L H_\alpha \varphi, \psi \rangle$ は $\mathfrak{h}^\partial_1$ 上の bilinear form $B_\alpha(\varphi, \psi)$ に unique に拡張される。$B_\alpha(\varphi, \psi)$ は次の條件を満たす。

$$|B_\alpha(\varphi, \psi)| \leq C \|\varphi\|^\partial_1 \cdot \|\psi\|^\partial_1, \qquad C'(\|\varphi\|^\partial_1)^2 \leq B_\alpha(\varphi, \psi) \qquad (17)$$

$$-\langle L H_\alpha \varphi, \psi \rangle = B_\alpha(\varphi, \psi), \quad \varphi \in \mathfrak{h}^\partial_0, \ \psi \in \mathfrak{h}^\partial_1 \qquad (18)$$

Proposition 2. $L H_\alpha$ は $\mathfrak{h}^\partial_0$ 上 def され、$\mathfrak{h}^\partial$ で値をとるが、これは $\mathfrak{h}^\partial_1$ において次の意味で closable である。

$\varphi_n \in \mathfrak{h}^\partial_0$ が、$\varphi_n \to 0$ in $\mathfrak{h}^\partial_1$, $\langle L H_\alpha \varphi_n - \varphi^*, \psi \rangle \to 0$, for ${}^\forall\psi \in \mathfrak{h}^\partial_1$, ${}^\exists\varphi^* \in \mathfrak{h}^\partial$ であれば、$\varphi^* = 0$.

∵ $\varphi_n \in \mathfrak{h}^\partial_0$ ゆえ $L H_\alpha \varphi_n \in \mathfrak{h}^\partial_1$. 故に、$0 = \lim \langle L H_\alpha \varphi_n - \varphi^*, \psi \rangle$

$= \lim \langle L H_\alpha \varphi_n, \psi \rangle - \langle \varphi^*, \psi \rangle = -\lim B_\alpha(\varphi_n, \psi) - \langle \varphi^*, \psi \rangle = -\langle \varphi^*, \psi \rangle$

$\mathfrak{h}^\partial_1$ は $\mathfrak{h}^\partial$ で dense だから $\varphi^* = 0$.

Def. そこで、$\varphi \in \mathfrak{h}_1^\partial$ で、次のような $\{\varphi_n\} \subset \mathfrak{h}_0^\partial$ と $\varphi^* \in \mathfrak{h}$ の存在するようなものの全体を $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$、$\varphi^*$ を $\overline{LH_\alpha}\varphi$ と def. する。(φ^* は prop. 2 により unique)

$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{in } \mathfrak{h}_1^\partial, \qquad \langle LH_\alpha \varphi_n - \varphi^*, \psi \rangle = 0, \quad \forall \psi \in \mathfrak{h}_1^\partial .$$

Cor.

$$B_\alpha(\varphi, \psi) = -\langle \overline{LH_\alpha}\varphi, \psi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha}), \ \psi \in \mathfrak{h}_1^\partial . \qquad (19)$$

$$\overline{LH_\alpha}\varphi = 0, \ \text{for } \varphi \in \mathcal{D}(\overline{LH_\alpha}) \Rightarrow \varphi = 0 \qquad (20)$$

∵ 前者は Def. から、後者は (17) 式と併せれば明らか。

proposition 3. $\mathcal{D}(\overline{LH_\alpha})$ は α によらない。これを $\mathcal{D}_\partial$ とかけば

$$\overline{LH_\alpha}\varphi - \overline{LH_\beta}\varphi + (\alpha - \beta)\overline{LG_\alpha^\partial} H_\beta \varphi = 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}_\partial . \qquad (21)$$

これは、(16) と smooth な φ_n による limit 移行によって示す。G_α^∂ が tame な operator なので $LH_\alpha\varphi_n$ と $LH_\beta\varphi_n$ の一方が収束すると他も収束する。

proposition 4. $\varphi \in \mathfrak{h}_1^\partial$ に対して、次の $\overline{LH_\alpha}'\varphi \in \mathcal{D}_\partial$ が ~~unique~~ に存在する。

$$\overline{LH_\alpha}(\overline{LH_\alpha}'\varphi) = \varphi,$$

$$-B_\alpha(\overline{LH_\alpha}'\varphi, \psi) = \langle \varphi, \psi \rangle, \quad \psi \in \mathfrak{h}_1^\partial \qquad (22)$$

∵ $\varphi \in \mathfrak{h}_1^\partial$ できまる $\mathfrak{h}_1^\partial$ 上の functional $F(\psi) = \langle \varphi, \psi \rangle$ を def. すると

$|F(\psi)| = |\langle \varphi, \psi \rangle| \le \|\varphi\|_\partial \|\psi\|_\partial \le \|\varphi\|_\partial \|\psi\|_1^\partial$ だから、Riesz の Th. によって

$$\langle \varphi, \psi \rangle = F(\psi) = \langle \varphi^*, \psi \rangle_1, \quad \varphi^* \in \mathfrak{h}_1^\partial$$

ところが (17) により、Milgram-Lax の Th. で次のような $\varphi^{**} \in \mathfrak{h}_1^\partial$ が存在する。

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi^*, \psi \rangle_1 = B_\alpha(\varphi^{**}, \psi).$$

uniqueness は (20) から明らかなので、$\varphi^{**} \in \mathcal{D}_\partial$, $\overline{LH_\alpha}\varphi^{**} = -\varphi$ を示せば $\overline{LH_\alpha}'\varphi = -\varphi_{**}$ と def. すればよい。ところで $\varphi_n \in \mathfrak{h}_0^\partial$, $\varphi_n \to \varphi^{**}$ なるものをとると、$LH_\alpha\varphi_n \in \mathfrak{h}_1^\partial$ としてよいから、$\langle LH_\alpha\varphi_n + \varphi, \psi \rangle = \langle LH_\alpha \varphi_n, \psi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle$

$= -B_\alpha(\varphi_n, \psi) + \langle \varphi, \psi \rangle \to -B_\alpha(\varphi^{**}, \psi) + \langle \varphi, \psi \rangle = -\langle \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, \psi \rangle = 0$.

この $\overline{LH_\alpha}'$ は $\mathfrak{h}_1^\partial$ 上 def. されているが、実は $\mathfrak{h}^\partial$ 全体の上に拡張されるので、これが $\overline{LH_\alpha}$ の inverse になっている。すなわち、

Theorem, 1 $\overline{LH_\alpha}$ は $\mathcal{D}_\partial$ を $\mathfrak{h}^\partial$ の上の一対一の map し，その inverse $\overline{LH_\alpha}^{-1}$ は次の性質をもつ．

$$LH_\alpha(\overline{LH_\alpha}^{-1}\varphi)=\varphi,\quad \varphi\in\mathfrak{h}_1^\partial;\qquad \overline{LH_\alpha}^{-1}(\overline{LH_\alpha}\varphi)=\varphi,\quad \varphi\in\mathcal{D}_\partial.$$

$$B_\alpha(\overline{LH_\alpha}^{-1}\varphi,\psi)=-\langle\varphi,\psi\rangle,\quad \varphi\in\mathfrak{h}^\partial,\ \psi\in\mathfrak{h}_1^\partial \tag{23}$$

$$\|\overline{LH_\alpha}^{-1}\varphi\|_1^\partial\leq C\|\varphi\|_\partial,\quad \varphi\in\mathfrak{h}^\partial. \tag{24}$$

(22) で $\psi=\overline{LH_\alpha}'\varphi$ とおき，(17) に注意すれば

$$c'(\|\overline{LH_\alpha}'\varphi\|_1^\partial)^2\leq B_\alpha(\overline{LH_\alpha}'\varphi,\overline{LH_\alpha}'\varphi)=-\langle\varphi,\overline{LH_\alpha}'\varphi\rangle\leq\|\varphi\|_\partial\|\overline{LH_\alpha}'\varphi\|_\partial.$$

故に

$$c'\|\overline{LH_\alpha}'\varphi\|_1^\partial\leq\|\varphi\|_\partial.$$

したがって $\overline{LH_\alpha}'$ は $\mathfrak{h}^\partial$ で def. され，$\mathfrak{h}_1^\partial$ で値をとる bdd. operator $\overline{LH_\alpha}^{-1}$ に unique に ext. できる．これに対し (23) (24) が成立つことは明らかである．$\overline{LH_\alpha}^{-1}\varphi$ が任意の $\varphi\in\mathfrak{h}^\partial$ に対し $\mathcal{D}_\partial$ に入ること，$LH_\alpha(\overline{LH_\alpha}^{-1}\varphi)=\varphi$ なことは $\overline{LH_\alpha}$ の def. にもどれば容易にわかる」

以上により，望ましい resolvent の候補として

Def. $$G_\alpha v=G_\alpha^0 v-H_\alpha\overline{LH_\alpha}^{-1}\overline{LG_\alpha^0}v,\quad v\in\mathfrak{h}.$$

7. G_α が望ましい resolvent であること．

Proposition 5 $u,v\in\mathfrak{h}_0$ かつ $(\alpha-A)u=v$ on D とすると

$$\alpha\|u\|_s^2+\{\|u\|_e^2-\|u\|_s^2\}=(u,v)_s-\langle Lu,u\rangle \tag{25}$$

$$\|\alpha u-v\|_s^2+\alpha\{\|u\|_e^2-\|u\|_s^2\}=(u,v)_e-(u,v)_s-\langle\alpha u-v,Lu\rangle$$

$$\alpha\|\alpha u-v\|_s^2+\{\|\alpha u-v\|_e^2-\|\alpha u-v\|_s^2\} \tag{26}$$

$$=(\alpha u-v,Av)_s+\langle Lv,\alpha u-v\rangle-\alpha\langle Lu,\alpha u-v\rangle \tag{27}$$

∵ (25) は $(Au,u)+D(u,u)+\langle\frac{\partial}{\partial n}u,u\rangle=0$，で $Au=\alpha u-v$ とおくことにより，(26) は $(Au,Au)+D(u,Au)+\langle\frac{\partial}{\partial n}u,Au\rangle=0$，で $Au=\alpha u-v$ として，(27) は $(Aw,w)+D(w,w)+\langle\frac{\partial}{\partial n}w,w\rangle=0$，で $w=\alpha u-v$ とおき，そうして $Aw=\alpha w-Av$ に注意すれば得られる．

proposition 5'. $v\in\mathfrak{g}_0$, $u=G^0_\alpha v-H_\alpha\overline{LH_\alpha}^{-1}\overline{LG^0_\alpha}v$ に対して

$$\alpha\|u\|_s^2+\{\|u\|_e^2-\|u\|_s^2\}=(u,v)_e-(u,v)_s \qquad (25')$$

$$\|\alpha u-v\|_s^2+\alpha\{\|u\|_e^2-\|u\|_s^2\}=(u,v)_e-(u,v)_s \qquad (26')$$

$$\alpha\|\alpha u-v\|_s^2+\{\|\alpha u-v\|_e^2-\|\alpha u-v\|_s^2\}=(\alpha u-v,Av)_s+\langle Lv,\alpha u-v\rangle \qquad (27')$$

これは, $\overline{LH_\alpha}^{-1}\overline{LG^0_\alpha}v=\varphi$ とおき, $\varphi_n\in\mathfrak{g}^\partial_0$ かつ $\varphi_n\to\varphi$ なるものをとり $u_n=G^0_\alpha v-H_\alpha\varphi_n$ によって u を近似すること, u_n と v の間には (25)–(27) が成立つことに注意すれば容易に示せる. 途中, (15) をつかう.

Theorem 2.

$$\alpha\|G_\alpha v\|_s\le\|v\|_s,\quad v\in\mathfrak{g} \qquad (28)$$

$$\alpha\|G_\alpha v\|_e\le\|v\|_e,\quad v\in\mathfrak{g}_* \qquad (29)$$

$$\|\alpha G_\alpha v-v\|_s\to0,\ \text{as}\ \alpha\to\infty,\quad v\in\mathfrak{g} \qquad (30)$$

$$\|\alpha G_\alpha v-v\|_e\to0,\ \text{as}\ \alpha\to\infty,\quad v\in\mathfrak{g}_* \qquad (31)$$

$$G_\alpha v-G_\beta v+(\alpha-\beta)G_\alpha G_\beta v=0,\quad v\in\mathfrak{g} \qquad (32)$$

∵ $v\in\mathfrak{g}_0$ に対して (25')–(27') を組合せれば (28)–(31) は容易にわかる. しかし, (28), (29) は各々 $v\in\mathfrak{g}$, $v\in\mathfrak{g}_*$ に連続に拡張され, それが出来れば (30) (31) も明らか. (32) は G_α の def. にもどり構成要素に分解して整理すれば殆どたやすくえられる.

あとは 1 の仮定 4), 5) をたしかめればよい. 実は $\alpha_0=1$ となるように def. してある.

proposition 6

$$(f,g)_s-(Af,g)_s=(f,g)_e+\langle Lf,g\rangle,\quad f,g\in\mathfrak{g}_0 \qquad (33)$$

$$(f,g)_s-(\mathfrak{A}f,g)_s=(f,g)_e,\quad f\in\mathfrak{D},\ g\in\mathfrak{g}_* \qquad (33')$$

∵ (33) は Green-Stokes 公式による形式的な計算. (34) は $v\in\mathfrak{g}_0$ に対する $G_\alpha v$ を smooth fn. で近似することで示す. 途中, (25') で $\alpha\ge1$ とすると得られる次の評価を用いる. $\|G_\alpha v\|_e\le\|v\|_s$.

Cor.

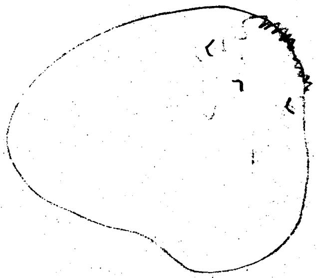
i) $(f,f)_s-(\mathfrak{A}f,f)_s=\|f\|_e^2,\quad f\in\mathfrak{D}$

ii) $(\mathfrak{A}f,g)_s-(f,\mathfrak{A}g)_s=0,\quad f,g\in\mathfrak{D}.$

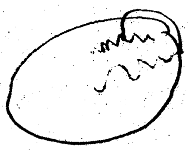
8 bd. 條件の直観的意味

拡散過程のばあい，(1) の Lu における第1項は ∂D にそっての拡散，2項は ∂D にそっての drift，第3項は粒子の消滅，第4項は境界で非常におそく動く現象 (sticky barrier)，5項は反射，最終項は ∂D からの jump であった。

波動方程式のばあい，Feller [2] は第4項は，(一次元のばあい) 弦の端点が mass をもつために起る現象として説明している。多次元のばあい，この項は同じと思われるが，第2項 あるいは ∂D 上の Laplacian のようなばあい，この項は ∂D もまた振動し，一旦 ∂D にきた波動が



∂D に固有の波動をひきおこし，それが再び内部に影響を及ぼすために現れる term と思われる。最終項は波動が ∂D に伝わったのち，その energy が内部あるいは ∂D の外の点に短絡することに対応すると思われるが，そのような現象がしばしば見られるのかどうか，やや奇妙な感じもする。



9 方程式 $\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \overline{\mathbb{H}}_\alpha \varphi$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \overline{\mathbb{H}}_\alpha \varphi$

$\mathfrak{H}^\partial$ に $\overline{\mathbb{H}}_\alpha$ を generator とする Hille-Yosida 半群の存在を示す。また，$\mathfrak{H}^\partial_1$ に属する φ, ψ に対して，$\langle\varphi,\psi\rangle_\alpha = \langle\varphi,\psi\rangle + B_\alpha(\varphi,\psi)$ と def. すると これは内積の性質をもち，位相は $\langle\varphi,\psi\rangle_1$ と同じなので $\mathfrak{H}^\partial_1$ はこれについて Complete である。$\langle\varphi,\psi\rangle_\alpha$ による Hilbert space を $\mathfrak{H}^\partial_\alpha$ とすると，$\frac{\partial}{\partial t}u = Au$ のときと同じように 1 の結果をつかって $\begin{pmatrix}\mathfrak{H}^\partial_\alpha \\ \mathfrak{H}^\partial\end{pmatrix}$ 上の半群が出来，$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \overline{\mathbb{H}}_\alpha \varphi$ の解がとける。

$\overline{\mathbb{H}}_\alpha$ を generator とする半群は A に対応する diffusion の ∂D 上の軌跡を ∂D 上の local time で觀察したものである。$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi = \overline{\mathbb{H}}_\alpha \varphi$ の意味は何であろうか？想像はつくとして，またの bd. 條件の意味もふくめて，これらを数学的に描写できる手段があれば面白いし，有用でもあろう。

9. 補足

1) domain $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(\Omega)$ にどのような函数が属するかが一つの問題であるが、これについてさしあたり次のことだけは証明できる。

「$\bar{D}$ 上の smooth な函数 u で $Lu(x)=0$, $\forall x\in\partial D$ をみたすものは $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}(\Omega)$ に入る。」 measure $\nu(x, \ )$ が ∂D 上に集中しているという我々の場合について言うと、この条件は ∂D の近傍では 0 となる函数については明らかにみたされるから、それらは $\mathfrak{D}$ に入る。

然しこれでは $\nu(x, D)>0$ のばあいは別に考えねばならない。

2) 3のはじめの方で $\delta(x)$ が部分的に正であったり、0 であったりするばあいが困難とかいたが、この場合も容易なことが判った。証明をかいてなかったので説明することが困難だが、実は 7 の proposition 5', (27') の左辺第2項のとりあつかいに上の条件がなかったのだが、これが不要であった。

文献

[1] W. Feller; The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformations, Ann. of Math.(2) **55**, 468-519(1952).

[2] W. Feller; On the equation of the vibrating string, J. Math. Mech., **8**, 339-348(1959).

[3] K. Sato, T. Ueno; Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary, J. Math. Kyoto Univ., **4**, 529-606 (1965).

[4] T. Ueno; The diffusion satisfying Wentzell's boundary condition and the Markov process on the boundary, I, Proc. Jap. Acad., **36**, 533-538; II, 625-629(1960).

[5] A. D. Wentzell; On lateral conditions for multi-dimensional diffusion processes, Teor. Veroyat. Primen., **4**, 172-185 (1959).

[6] 吉田耕作 ; Semi-group の理論による波動方程式の積分, 数学, **8**, 65-71(1956).